Concours ESIGETEL - Session juin 1994
Série Générale
MATHÉMATIQUES II
ALGÈBRE - GÉOMÉTRIE
Durée 4 heures
* * *

Correction

Premier problème

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. La droite $D(t)$ tangente à $\mathscr{H}$ au point $A(t)$ est dirigée par le vecteur $v(t) = a(-\sin t, \cos t, 1)$, on obtient donc une représentation paramétrique de la droite $D(t)$:

$$\begin{cases} x = -\mu \sin t + a \cos t \\ y = \mu \cos t + a \sin t \\ z = \mu + at \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

L'angle θ qui fait $D(t)$ avec le plan xoy est défini par $\sin\theta = \dfrac{|\overrightarrow{d}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{d}\|.\|\overrightarrow{n}\|}$ où $\overrightarrow{d}$ est un vecteur directeur de $D(t)$ et $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à xoy. On prend $\overrightarrow{d} = (-\sin t, \cos t, 1)$ et $\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)$. On trouve $\sin\theta = \sqrt{2}/2$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
La courbe $\mathscr{H}$ est une hélice tracée sur le cylindre de révolution, dirigé par la droite (oz) et d'équation $x^2 + y^2 = a^2$. Le plan tangent au cylindre au point $A(t) = (a\cos t, a\sin t, at)$ est défini par l'équation $(x - a\cos t)a\cos t + (y - y)2\sin t = 0$ qui est équivalent à $x\cos t + y\sin t - a = 0$. On voit bien que la droite $D(t)$ est contenue dans le plan tangent.

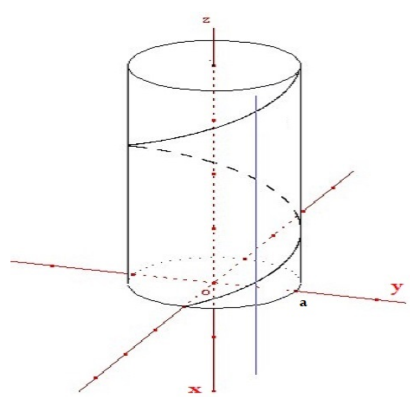

FIGURE 1 – Hélice sur un cylindre

2. La droite $D(t)$ fait un angle non nul avec le plan (xoy), donc elle coupe chaque plan parallèle à xoy en un point unique. Ainsi $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un point unique $M(\lambda, t) \in D(t) \cap (z = \lambda)$.

3. Posons $M(\lambda, t) = (x(\lambda, t), y(\lambda, t), z(\lambda, t))$ avec $x(\lambda, t) = a\cos t + at\sin t - \lambda\sin t,\ y(\lambda, t) = a\sin t - at\cos t + \lambda\cos t,\ z(\lambda, t) = \lambda$.
Le plan tangent à Σ au point $M(\lambda, t)$ est dirigé par les vecteurs $\left(\dfrac{\partial x}{\partial\lambda}(\lambda, t), \dfrac{\partial y}{\partial\lambda}(\lambda, t), \dfrac{\partial z}{\partial\lambda}(\lambda, t)\right) = (-\sin t, \cos t, 1)$ et $\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}(\lambda, t), \dfrac{\partial y}{\partial t}(\lambda, t), \dfrac{\partial z}{\partial t}(\lambda, t)\right) = (at\cos t - \lambda\cos t, at\sin t - \lambda\sin t, 0)$. Son équation est

$$\begin{vmatrix} x-(a\cos t+at\sin t-\lambda\sin t) & y-(a\sin t-at\cos t+\lambda\cos t) & z-\lambda \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ at\cos t-\lambda\cos t & at\sin t-\lambda\sin t & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Après simplification on obtient $(\lambda-at)(x\sin t-y\cos t+z-at)=0$. Si $\lambda=at$, on aura $M(t\lambda)=(a\cos t,a\sin t,at)\in\mathscr{H}$. Ainsi, le plan tangent en un point $M(\lambda,t)\notin\mathscr{H}$ a pour équation cartésienne :

$$x\sin t-y\cos t+z-at=0$$

Si $M(t,\lambda)\in\mathscr{H}$, alors $\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}(\lambda,t),\frac{\partial y}{\partial\lambda}(\lambda,t),\frac{\partial z}{\partial\lambda}(\lambda,t)\right)=(-\sin t,\cos t,1)$ et $\left(\frac{\partial x}{\partial t}(\lambda,t),\frac{\partial y}{\partial t}(\lambda,t),\frac{\partial z}{\partial t}(\lambda,t)\right)=(0,0,0)$. Donc le point $M(\lambda,t)$ est un point singulier.

4. (a) L'intersection de Σ et du plan xoy est définie par paramétrisation

$$\begin{cases} x(t)=a(\cos t+t\sin t) \\ y(t)=a(\sin t-t\cos t) \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Ce sont les équations paramétriques de la développante de cercle de centre O et de rayon a. Il s'agit donc d'une développante du cercle (anti-clothoïde).

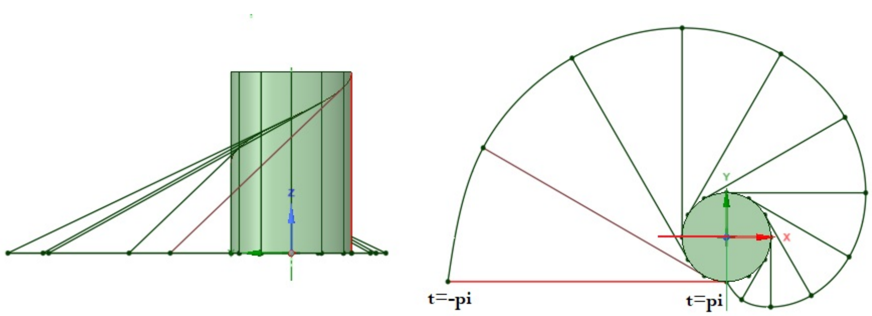

FIGURE 2 – Tangentes à $\mathscr{H}$ et l'intersection de Σ avec le plan xoy

(b) La normale en $m(t)=(a(\cos t+t\sin t),a(\sin t-t\cos t))$ est dirigé par le vecteur $v(t)=(at\cos t,at\sin t)$. Donc la normale en $m(t)$ a pour équation cartésienne $\cos(t)x+\sin(t)y-a^2$, c'est aussi l'équation de la tangente au cercle de centre O et de rayon a au point $(a\cos t,a\sin t)$.

(c) Soit $M(t)=(x(t),y(t),z(t))=(a\cos t+at\sin t-h\sin t,a\sin t-at\cos t+h\cos t,h)$ un point de γ_h. Si on pose $t=\tau+\frac{h}{a}$, on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos\left(\tau+\frac{h}{a}\right)+a\left(\tau+\frac{h}{a}\right)\sin\left(\tau+\frac{h}{a}\right)-h\sin\left(\tau+\frac{h}{a}\right) && (1)\\ &= a\cos\tau\cos\left(\frac{h}{a}\right)-a\sin\tau\sin\left(\frac{h}{a}\right)+a\tau\sin\tau\cos\left(\frac{h}{a}\right)+a\tau\cos\tau\sin\left(\frac{h}{a}\right) && (2)\\ &= (a\cos\tau+a\tau\sin\tau)\cos\left(\frac{h}{a}\right)-(a\sin\tau-a\tau\cos\tau)\sin\left(\frac{h}{a}\right) && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= a\sin\left(\tau+\frac{h}{a}\right)-a\left(\tau+\frac{h}{a}\right)\cos\left(\tau+\frac{h}{a}\right)+h\cos\left(\tau+\frac{h}{a}\right) && (4)\\ &= a\sin\tau\cos\left(\frac{h}{a}\right)+a\cos\tau\sin\left(\frac{h}{a}\right)+a\tau\cos\tau\cos\left(\frac{h}{a}\right)+a\tau\sin\tau\sin\left(\frac{h}{a}\right) && (5)\\ &= (a\sin\tau+a\tau\cos\tau)\cos\left(\frac{h}{a}\right)+(a\cos\tau+a\tau\sin\tau)\sin\left(\frac{h}{a}\right) && (6) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{h}{a}\right) & -\sin\left(\dfrac{h}{a}\right) \\ \sin\left(\dfrac{h}{a}\right) & \cos\left(\dfrac{h}{a}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\tau + a\tau\sin\tau \\ a\sin\tau - a\tau\cos\tau \end{pmatrix}$$

Donc on peut déduire γ_h à partir de γ_0 par la rotation autour de l'axe des z et d'angle $\dfrac{h}{a}$ et de la translation de vecteur $h\overrightarrow{k}$.

5.

Deuxième problème

1. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$. Si $x \in N_k(\lambda)$, alors $(f - \lambda\boldsymbol{i})^k(x) = 0$ et donc $(f - \lambda\boldsymbol{i})^{k+1}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in N_{k+1}(\lambda)$. La suite $(N_k(\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Soient $x, y \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^k$ et $\alpha \in \mathbf{C}$, alors il existe des entiers k_1 et k_2 tels que $x \in \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^{k_1}$ et $y \in \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^{k_2}$, donc $x, y \in \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^{\max(k_1,k_2)}$ et par conséquent $x + \alpha y \in \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^{\max(k_1,k_2)} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^k$. D'où $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^k$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Si λ est une valeur propre de f, il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$ et donc $x \in \ker(f - \lambda\boldsymbol{i}) \subset F_\lambda$ et donc $F_\lambda \neq \{0\}$.
Inversement, soit $x \in F_\lambda$ non nul et donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^k$. Considérons l'ensemble

$$A = \{k \in \mathbb{N} | x \in \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^k\}.$$

Cette ensemble est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, soit donc $k_0 = \inf(A)$. Le vecteur non nul $y = (f - \lambda\boldsymbol{i})^{k_0-1}(x)$ vérifie $(f - \lambda\boldsymbol{i})(y) = 0$ et donc y est un vecteur propre de f.
Si $x \in F_\lambda$, alors il existe un entier k tel que $(f - \lambda\boldsymbol{i})^k(x) = 0$, donc $(f - \lambda\boldsymbol{i})^k(f(x)) = f\left((f - \lambda\boldsymbol{i})^k(x)\right) = f(0) = 0$, d'où $f(x) \in F_\lambda$.

3. Soit $x_1, x_2, ..., x_p$ des vecteurs de E tels que $x_i \in F_{\lambda_i}$ pour $i \in [\![1, p]\!]$ et $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0$. Pour chaque i il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i \in \ker(f - \lambda_i\boldsymbol{i})^{k_i}$. Considérons alors les polynômes $P_i = (X - \lambda_i)^{k_i}$, $1 \leq i \leq p$, qui sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de décomposition des noyaux :

$$\sum_{i=1}^{p} \ker(f - \lambda_i\boldsymbol{i})^{k_i} = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(f - \lambda_i\boldsymbol{i})^{k_i}$$

et donc x_i est nul pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$. Ainsi la somme $\sum_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}$ est directe.

4. Soit $k \geq n(\lambda)$. On peut écrire $k = n(\lambda) + i$ avec $i \in \mathbb{N}$. Soit x un élément quelconque de $N_{k+1}(\lambda)$. On a :

$$0 = (f - \lambda\boldsymbol{i})^{k+1}(x) = (f - \lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)+i+1}(x) = (f - \lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)+1}\left(f - \lambda\boldsymbol{i})^i(x)\right).$$

Donc $(f - \lambda\boldsymbol{i})^i(x) \in N_{n(\lambda)+1}(\lambda) = N_{n(\lambda)}(\lambda)$. On a donc $0 = (f - \lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)}(f - \lambda\boldsymbol{i})^i(x)) = (f - \lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)+i}(x) = (f - \lambda\boldsymbol{i})^k(x)$. On vient de démontrer que $x \in N_{k+1}(\lambda) \Rightarrow x \in N_k(\lambda)$ et donc $N_{k+1}(\lambda) \subset N_k(\lambda)$. Comme on sait déjà que $N_k(\lambda) \subset N_{k+1}(\lambda)$, on a $N_k(\lambda) = N_{k+1}(\lambda)$.
On a donc finalement montré que si $N_{n(\lambda)}(\lambda) = N_{n(\lambda)+1}(\lambda)$ alors, pour tout $k \geq n(\lambda)$, $N_k(\lambda) = N_{n(\lambda)}(\lambda)$ et donc

$$F_\lambda = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^k = \bigcup_{k=0}^{n(\lambda)} \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^k = N_{n(\lambda)}(\lambda).$$

5. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{C}[X]$ définie par $f(P) = P'$. On a $f(1) = 0$, donc 0 est une valeur propre de f, de plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(P) = P^{(k)}$. Donc $(N_k(0))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante puisque $X^k \in N_{k+1}(0)$ et $X^k \notin N_k(0)$. Donc 0 est une valeur propre d'indice infini.

6. Dans ce cas l'ensemble $\{\deg(P)|P(u) = 0 \text{ et } P \in \mathbb{C}[X] \text{ non nul}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément que l'on notera d. Soit π_f un polynôme annulateur de f de degré d que l'on peut supposer de plus unitaire afin de garantir l'unicité.
Soit maintenant un polynôme annulateur P quelconque de f. Par division euclidienne,

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{C}[X],\, P = Q \times \pi_f + R \text{ avec } \deg(R) < d.$$

De plus $R(f) = P(f) - Q(f) \circ \pi_f(f) = 0$. Comme R annule f et est de degré strictement inférieur au degré minimal d, $R = 0$. Ce qui prouve bien que $P = Q \times \pi_f$.
Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array}$$

Supposons qu'il existe un polynôme P non nul, annulant f. Posons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Comme $P(f) = 0$, alors $\sum_{k=0}^{d} a_k f^k(P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, en particulier $\sum_{k=0}^{d} a_k f^k(X^j) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k j^k\right) X^j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, donc $\sum_{j=0}^{d} a_k j^k = 0$. Donc le polynôme P admet une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul ce qui est absurde.

7. (a) Soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, puis $\pi_f(f)(x) = \pi_f(\lambda)x = 0$, d'où $\pi_f(\lambda) = 0$. Donc l'ensemble des valeurs propres de f est une partie de l'ensemble des racines de π_f, qui est fini, donc $\operatorname{Sp} f$ est fin.

(b) Soit λ une valeur propre de f, donc c'est une racine de π_f. Notons r_λ l'ordre de multiplicité de λ dans π_f. Le polynôme minimal π_f s'écrit donc sous la forme $\pi_f = (X-\lambda)^{r_\lambda} Q$ où Q est un polynôme unitaire, premier avec $X - \lambda$. Supposons $\ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda} \subsetneq \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda + 1}$. Considérons alors le polynôme $P = (X - \lambda)^{r_\lambda + 1} Q$, qui est annulateur de f. D'après les théorèmes de décomposition des noyaux,

$$E = \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda} \oplus \ker Q(f) = \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_{\lambda+1}} \oplus \ker Q(f).$$

Mais cette égalité est en contradiction avec $\ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda} \subsetneq \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{r_\lambda + 1}$. Ainsi, λ est une valeur propre d'indice fini.

(c) Si f possède un polynôme minimal π_f, alors les valeurs propres de f sont exactement les racines de π_f. En effet, soit λ une valeur propre de f et $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, puis $\pi_f(f)(x) = \pi_f(\lambda)x = 0$, d'où $\pi_f(\lambda) = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\pi_f(\lambda) = 0$, alors $\pi_f = (X - \lambda)Q$ avec $\deg(Q) < \deg(\pi_f)$, donc $Q(f) \neq 0$. Alors $\{0\} \neq \operatorname{Im} Q(f) \subset \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})$, ce qui implique que λ est une valeur propre de f.
En conclusion, si f possède un polynôme minimal, alors l'ensemble des valeurs propres de f est non vide car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos et c'est exactement l'ensemble de racines de π_f. D'où

$$\pi_f = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X - \lambda)^{n(\lambda)}$$

où $n(\lambda)$ est l'ordre de multiplicité de λ qui coïncide avec l'indice de λ (d'après la question **(b)**)

(d) D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \ker(f - \lambda \boldsymbol{i})^{n(\lambda)} = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} N_{n(\lambda}(\lambda)$.
Comme λ est d'indice fini, alors $N_{n(\lambda)} = F_\lambda$ et donc $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} F_\lambda$.

II

1. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors la suite $(N_k(\lambda)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire puisqu'il s'agit d'une suite croissante de sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie. Ainsi λ est d'indice fini et $F_\lambda = N_{n(\lambda)}(\lambda)$.
Soit f_λ l'endomorphisme induit par f sur F_λ (F_λ est stable par f). On a $\forall x \in F_\lambda$, $(f_\lambda - \lambda \boldsymbol{i})^{n(\lambda)}(x) = 0$, donc $(f_\lambda - \lambda\boldsymbol{i})$ est nilpotent d'indice $n(\lambda)$, d'où $n(\lambda) \leq \dim(F_\lambda)$.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ d'indice $n(\lambda)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^{k+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (f-\lambda\boldsymbol{i})^{k+1}(x) = (f-\lambda\boldsymbol{i})^k(x')$ où $x' = (f-\lambda\boldsymbol{i})(x)$, donc $y \in \mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^k$.
$G_\lambda = \displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^k$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels.
Soit $y \in G_\lambda$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $x_k \in E$ tel que $y = (f-\lambda\boldsymbol{i})^k(x_k)$, donc $f(y) = f\circ(f-\lambda_i i)^k(x_k) = (f-\lambda\boldsymbol{i})^k \circ f(x_k) = (f-\lambda\boldsymbol{i})^k(f(x_k)) \in \mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^k$, d'où $f(y) \in G_\lambda$. D'où G_λ est stable par f.
D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)} = n - \dim F_\lambda$. D'autre part, $G_\lambda \subset \mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)}$ et donc $\dim G_\lambda \leq \dim \mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)}$. Mais $\mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)} \subset \mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^k$ pour tout $k \in [\![0, n(\lambda)]\!]$, donc $\mathrm{Im}(f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)} \subset \displaystyle\bigcap_{i=0}^{n(\lambda)} \ker(f-\lambda\boldsymbol{i})^k = G_\lambda$. Ainsi $n = \dim F_\lambda + \dim G_\lambda$.
Donc pour montrer que $E = F_\lambda \oplus G_\lambda$, il suffit de montrer que $F_\lambda \cap G_\lambda = \{0\}$. Soit donc $x \in F_\lambda \cap G_\lambda$, alors $(f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)}(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = (f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)}(y)$. Donc $(f-\lambda\boldsymbol{i})^{2n(\lambda)}(y) = 0$, puis $y \in \ker(f-\lambda\boldsymbol{i})^{2n(\lambda)} = \ker(f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)}$ ce qui entraîne $x = (f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda}(y) = 0$. D'où le résultat $E = F_\lambda \oplus G_\lambda$.

3. Posons $\chi_f = (X-\lambda)^{m(\lambda)}Q$ où $Q(\lambda) \neq 0$. Soit f_λ l'endomorphisme induit par f sur F_λ. On a $(f_\lambda - \lambda\boldsymbol{i})^{m(\lambda)} = 0$, donc λ est l'unique valeur propre de f_λ et par conséquent $\chi_{f_\lambda} = (X-\lambda)^k$ où $k = \dim F_\lambda$. Mais $E = F_\lambda \oplus G_\lambda$, donc $\chi_f = \chi_{f_\lambda} \times \chi_g$ où g est l'endomorphisme induit par f sur G_λ. λ n'est pas une valeur propre de g (tous les vecteurs propres associés à λ se trouvent dans F_λ), donc $\chi_g(\lambda) \neq 0$. Par conséquent $\chi_{f_\lambda} = (X-\lambda)^{m(\lambda)}$ et donc $\dim F_\lambda = m(\lambda)$.

4. On sait que la somme $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} F_\lambda$ est directe (la question 3. de la partie I). De plus on a l'égalité $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \dim F_\lambda = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} m(\lambda) = n = \dim E$, d'où :

$$E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} F_\lambda.$$

Le fait que $(f_\lambda - \lambda\boldsymbol{i})^{m(\lambda)} = 0$ peut s'exprimer ainsi $f_\lambda = \lambda\boldsymbol{i}_\lambda + n_\lambda$ où n_λ est nilpotent et $\boldsymbol{i}_\lambda$ est l'identité de F_λ, et donc il existe une base $\mathscr{B}_\lambda$ de F_λ dans la quelle la matrice de f_λ est de la forme :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Comme $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} F_\lambda$, on voit que $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \mathscr{B}_\lambda$ est une base de E dans laquelle la matrice de est de la forme $\mathrm{diag}(M_\lambda, \lambda \in \mathrm{Sp}(f))$.

III

1. On a $\forall k \in \mathbf{N}$, $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$ et donc $\dim\ker f^k \leq \dim\ker f^{k+1}$. Autrement dit la suite des entiers $\left(\dim(\ker f^k)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, cette suite à valeurs dans $\{0, 1, 2, ..., n\}$, donc

$$r = \inf\left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \dim\ker f^k = \dim\ker f^{k+1} \right\}$$

existe. Donc pour $k < r$, $\ker f^k \subsetneq \ker f^{k+1}$ et $\forall k \geq r$, $\dim\ker f^k = \dim\ker f^{k+1}$, d'où $r = p \leq n$.

2. • Soit $x \in \ker f^{k+1}$, donc $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = 0$ puis $f(x) \in \ker f^k$. D'où $f\left(\ker f^{k+1}\right) \subset \ker f^k$.

• Soit $y \in f(F) \cap \ker f^{k-1}$, donc $f^{k-1}(x) = 0$ et il existe $x \in F$ tel que $y = f(x)$, donc $f^{k-1}(f(x)) = f^k(x) = 0$, donc $x \in \ker f^k$ et comme $x \in F$ alors $x = 0$ puis $y = 0$. D'où $f(F) \cap \ker f^{k-1} = \{0\}$.

• Soit $x \in F$ tel $f(x) = 0$, donc $x \in F \cap \ker f = \{0\}$, ce qui implique que la restriction de f sur F est injective.

3. Soit F_p un sous-espace supplémentaire de $\ker f^{p-1}$ dans $\ker f^p$. On a donc

$$\ker f^p = F_p \oplus \ker f^{p-1}.$$

De plus $\ker f \cap F_p \subset \ker f^{p-1} \cap F_p = \{0\}$ et $f(F_p) \subset f(\ker f^p) \subset \ker f^{p-1}$. Donc f applique F_p injectivement dans $\ker f^{p-1}$.

Soit $x \in f(F_p) \cap \ker f^{p-2}$, donc il existe $y \in F_p$ tel que $x = f(y)$ et on a $0 = f^{p-2}(x) = f^{p-1}(y)$, donc $y \in \ker f^{p-1} \cap F_p = \{0\}$, donc $y = 0$ puis $x = 0$.

On a donc $f(F_p) \oplus \ker f^{p-2} \subset \ker f^{p-1}$, donc il existe un sous-espace vectoriel H_{p-1} tel que

$$\ker f^{p-1} = H_{p-1} \oplus f(F_p) \oplus \ker f^{p-2}.$$

On note $F_{p-1} = H_{p-1} \oplus f(F_p)$, donc

$$\ker f^{p-1} = F_{p-1} \oplus \ker f^{p-2}$$

et

$$f(F_p) \subset F_{p-1}.$$

Donc la propriété est démontre pour $k = p$. Supposons le résultat prouvé pour $k+1 \in \{2, 3, ..., p-1\}$ et montrons le pour k.

On a $\ker f \cap F_{k+1} \subset \ker f^k \cap F_{k+1} = \{0\}$ et $f(F_{k+1}) \subset f(\ker f^{k+1}) \subset \ker f^k$. Donc f applique F_{k+1} dans F_k injectivement.

Soit $x \in f(F_{k+1}) \cap \ker f^{k-1}$, donc il existe $y \in F_{k+1}$ tel que $x = f(y)$ et $f^{k-1}(x) = 0$, donc $f^k(y) = 0$ et donc $\ker f^k \cap F_{k+1} = \{0\}$, d'où $x = f(0) = 0$. ce qui implique $f(F_{k+1}) \cap \ker f^{k-1} = \{0\}$. On a donc $f(F_{k+1}) \oplus \ker f^{k-1} \subset \ker f^k$, donc il existe un sous-espace vectoriel H_k de E tel que

$$f(F_{k+1}) \oplus \ker f^{k-1} \oplus H_k = \ker f^k$$

On pose alors $F_k = f(F_{k+1}) \oplus H_k$, donc $\ker f^k = F_k \oplus \ker f^{k-1}$ et $f(F_{k+1}) \subset \ker F_k$.

Montrons que $F_1 = \ker f$. Pour $k = 1$, $\ker f = F_1 \oplus \ker f^0 = F_1 \oplus \ker \boldsymbol{i} = F_1$. Finalement,

$$\begin{aligned}
E &= \ker f^p = F_p \oplus \ker f^{p-1} && (7)\\
&= F_p \oplus F_{p-1} \oplus \ker f^{p-2} && (8)\\
&= F_p \oplus F_{p-1} \oplus ... \oplus F_2 \oplus \ker f && (9)\\
&= \bigoplus_{i=1}^{p} F_i && (10)
\end{aligned}$$

4. Notons $\mathscr{B}_p = \{e_{1,p}, e_{2,p}, ..., e_{n_p,p}\}$ et soit $\mathscr{B}'_{p-1}$ une famille qui complète $f(\mathscr{B}_p)$ en une base $\mathscr{B}_{p-1}$ de F_{p-1}. Donc $\mathscr{B}_{p-1}$ est de la forme :

$$\left\{ f\left(e_{1,p}\right), f\left(e_{2,p}\right), ..., f\left(e_{n_p,p}\right), e_{n_p+1,p-1}, ..., e_{n_{p-1},p-1} \right\}.$$

Choisissons une base $\mathscr{B}_k$ de F_k. Pour k descendant de p à 2, soit $\mathscr{B}'_{k-1}$ une famille qui complète $f(\mathscr{B}_k)$ en une base $\mathscr{B}_{k-1}$ de F_{k-1}. Puisque $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$, la concaténation des bases $\mathscr{B}_k$ pour $k \in \{1, ..., p\}$ forme une base de E.

5. En posant $\mathscr{B}'_p = \mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}'_k = \left(e_{n_{k+1}+1,k}, ..., e_{n_k,k}\right)$ pour chaque $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, on a

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}_p &= (e_{j,p})_{1 \le j \le n_p}\,, && (11)\\
\mathscr{B}_{p-1} &= f(\mathscr{B}_p) \cup \mathscr{B}'_{p-1} && (12)\\
&= (f(e_{j,p}))_{1 \le j \le n_p} \cup (e_{j,p-1})_{n_p+1 \le j \le n_{p-1}}\,, && (13)\\
\mathscr{B}_{p-2} &= f(\mathscr{B}_{p-1}) \cup \mathscr{B}'_{p-2} && (14)\\
&= \left(f^2(e_{j,p})\right)_{1 \le j \le n_p} \cup (f(e_{j,p-1}))_{n_p+1 \le j \le n_{p-1}} \cup (e_{j,p-2})_{n_{p-1}+1 \le j \le n_{p-2}}\,, && (15)\\
&\vdots && (16)\\
\mathscr{B}_1 &= \left(f^{p-1}(e_{j,p})\right)_{1 \le j \le n_p} \cup \left(f^{p-2}(e_{j,p-1})\right)_{n_p+1 \le j \le n_{p-1}} \cup \left(f^{p-3}(e_{j,p-2})\right)_{n_{p-1}+1 \le j \le n_{p-2}} && (17)\\
&\cup ... \cup (e_{j,1})_{n_2+1 \le j \le n_1}\,. && (18)
\end{aligned}
$$

Nous disposons maintenant d'une base $\mathscr{B} = (b_i)_{1 \le i \le n}$ de E, que nous pouvons représenter ses éléments par le tableau suivant dans le quel chaque ligne constitue une base de F_i ($1 \le i \le p$) et chaque vecteur se trouve au-dessus de son image par f, à l'exception des vecteurs de la dernière ligne, dont les images par f sont nuls.

F_p	$e_{1,p}$	...	$e_{n_p,p}$								
F_{p-1}	$f(e_{1,p})$	...	$f(e_{n_p,p})$	$e_{n_p+1,p-1}$	...	$e_{n_{p-1},p-1}$					
F_{p-2}	$f^2\,(e_{1,p})$	...	$f^2\left(e_{n_p,p}\right)$	$f\left(e_{n_p+1,p-1}\right)$	...	$f(e_{n_{p-1},p-1})$	$e_{n_{p-1}+1,p-2}$	...			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
F_1	$f^{p-1}\,(e_{1,p})$	...	$f^{p-1}\left(e_{n_p,p}\right)$	$f^{p-2}\left(e_{n_p+1,p-1}\right)$	...	$f^{p-2}\left(e_{n_{p-1},p-1}\right)$	$f^{p-3}\left(e_{n_{p-1}+1,p-2}\right)$	...	$e_{n_2+1,1}$	...	$e_{n_1,1}$

-IV-

1. Pour $i \in \{1, ..., p\}$ et $j \in \{n_{i+1}+1, ..., n_i\}$ avec $n_{p+1} = 1$, on note $\overline{\mathscr{B}}_{i,j} = \{f^{i-1}(e_{j,i}), f^{i-2}(e_{j,i}), ..., f(e_{j,i}), e_{j,i}\}$, la concaténation des bases $(\overline{\mathscr{B}}_i)_{1 \le i \le p}$ coïncide avec la concaténation des $(\overline{\mathscr{B}}_{i,j})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n_i}$. La matrice de f dans la base

$$\overline{\mathscr{B}}_{p,1} \cup ... \cup \overline{\mathscr{B}}_{p,n_p} \cup ... \cup \overline{\mathscr{B}}_{1,n_2+1} \cup ... \cup \overline{\mathscr{B}}_{1,n_1}$$

est alors $\operatorname{diag}(J_p(0), ..., J_p(0), ..., J_1(1), ..., J_1(0))$, chaque J_i apparaissant n_i fois.

2. Soit λ une valeur propre de f et $m(\lambda)$ son indice ordre de multiplicité. On a $(f_\lambda - \lambda\boldsymbol{i})^{m(\lambda)} = 0$, donc $f_\lambda = \lambda\boldsymbol{i}_{F_\lambda} + v$ où v est un endomorphisme de F_λ tel que $v^{m(\lambda)} = 0$, donc v est nilpotent.
Montrons que l'indice de v est $n(\lambda)$. On a $\pi_f = (X-\lambda)^{n(\lambda)}Q$ où $X - \lambda$ ne divise pas Q. En appliquant le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$E = \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)} \oplus \ker Q(f)$$

On en déduit $\dim\ker(f-\lambda)^{n(\lambda)} + \dim\ker Q(f) = n$.
Soit q un entier naturel. On pose $P = (X-\lambda)^q Q$. En appliquant le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$\ker P(f) = \ker(f - \lambda\boldsymbol{i})^q \oplus \ker Q(f)$$

On en déduit $\dim\ker(f-\lambda)^{n(\lambda)} + \dim\ker Q(f) = n$.
• Si $q \ge n(\lambda)$, alors π_f divise P donc $P(f) = 0$ et donc $\ker Q(f) = E$, donc avec $(*)$ et $(**)$, on a tire $\dim\ker(f-\lambda\boldsymbol{i})^q = \dim\ker(f-\lambda\boldsymbol{i})^{n(\lambda)}$.
Si maintenant $q < n(\lambda)$, alors π_f ne divise pas P, donc $\ker P(f) \ne 0$, c'est-à-dire $\ker P(f) \ne E$, et d'après $(*)$ et $(**)$, on tire $\dim\ker(f-\lambda)^q < \dim\ker(f-\lambda)^{n(\lambda)}$.
On déduit que l'indice de l'endomorphisme $f - \lambda\boldsymbol{i}$ est $n(\lambda)$.

3. Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les différentes valeurs propres de f. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $v_k = f_{\lambda_k} - \lambda_k \boldsymbol{i}_{F_{\lambda_i}}$ est nilpotent d'indice $n(\lambda_i)$. D'après la question 3, nous pouvons choisir une base de F_{λ_k} de sorte que la matrice de v_k soit sous sa forme canonique. Dans cette base f_{λ_k} est représenté par une matrice diagonale bloc A_k dont les éléments diagonaux sont les matrices $J_{m_k}(\lambda_k)$. La matrice $\mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_p)$ est une représentation matricielle de f.

4. Pour trouver la réduite de Jordan d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on suit les étapes suivantes :

(a) Calculer le polynômes caractéristiques et les valeurs propres de M

(b) Pour chaque valeur propre λ calculer le sous-espace propre associé $E_\lambda(M) = \ker(A - \lambda I_n)$ et trouver une base de $E_\lambda(M)$. Le nombre de blocs de Jordan associés à λ est $\dim E_\lambda(M)$.

(c) Pour chaque vecteur propre de la base de $E_\lambda(M)$, on construit le bloc de Jordan associé :

i. Si $v_1 \in E_\lambda(M)$ est un vecteur propre de la base de $E_\lambda(M)$, alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(M - \lambda I_n)v_2 = v_1$.

ii. Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(M - \lambda I_n)v_3 = v_2$.

iii. On arrête le processus lorsqu'il n y pas de solution.

iv. On a $Mv_1 = \lambda v_1$, $Mv_2 = v_1 + \lambda v_2, ..., Mv_p = v_{p-1} + \lambda v_p$.

• Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 & 1 \\ -1 & X & -1 & 1 \\ 0 & 0 & X-1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^3(X+1).$$

Les deux sous-espaces caractéristiques sont :

la droite propre $\ker(A + I_4) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, engendrée par $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre $E_1(A) = \ker(A - I_4) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, engendrée par $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc il y a deux blocs de Jordan associés à la valeur propre 1.

D'autre part, $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cherchons donc un vecteur de $\ker(A - I)^2$ qui n'est pas dans $\ker(A - I)$. Le vecteur e_3 fait l'affaire. On pose $v_4 = (A - I_4)e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_3$. La famille (v_1, v_2, v_4, e_3) est une base de $\mathbb{R}^4$. Dans cette base la matrice de f est

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_4, e_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Pour la matrice B on obtient $\chi_B = (X+2)^2(X-1)^2$. Les deux sous-espaces propres sont :
la droite propre $E_1(B) = \ker(B - I_4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, engendrée par $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
la droite propre $E_{-2}(B) = \ker(B + 2\,I_4) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, engendrée par $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On remarque que $(B - I)e_2 = v_1$ et $(B + 2I)(-e_4) = v_3$. La famille $(v_1, e_2, v_3, -e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Dans cette base la matrice de f est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique à la base $(v_1, e_2, v_3, -e_4)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

• • • • • • • • •